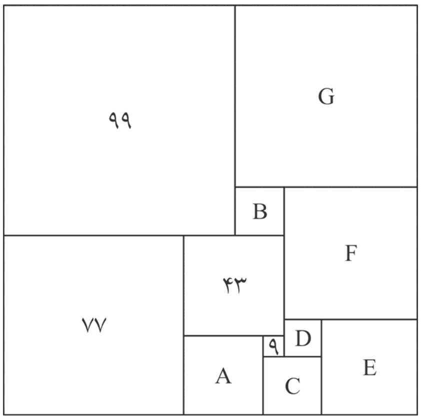
هندسه

بعضی از مسئله‌های هندسی، با استفاده از جبر به راحتی حل می‌شوند. به نمونه‌ی زیر دقت کنید:

مثال: کف یک اتاق با کاشی‌هایی به شکل روبه‌رو پوشانده شده است. تمام کاشی‌ها به شکل مربّع هستند. طول ضلع چهارتا از کاشی‌ها داده شده است. اندازهٔ ضلع بقیهٔ کاشی‌ها را پیدا کنید.



پاسخ: لطفاً در تمام ۷ مرحلهٔ راه‌حل به شکل نگاه کنید!

$A + ۴۳ = ۷۷ \Rightarrow A = ۷۷ - ۴۳ = ۳۴$

$B + ۹۹ = ۷۷ + ۴۳ \Rightarrow B + ۹۹ = ۱۲۰ \Rightarrow B = ۱۲۰ - ۹۹ = ۲۱$

$C + ۹ = A \Rightarrow C + ۹ = ۳۴ \Rightarrow C = ۳۴ - ۹ = ۲۵$

$D + ۹ = C \Rightarrow D + ۹ = ۲۵ \Rightarrow D = ۲۵ - ۹ = ۱۶$

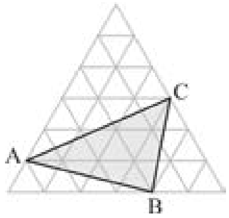
$E = C + D = ۲۵ + ۱۶ = ۴۱$

$F = D + E = ۱۶ + ۴۱ = ۵۷$

$G + B = ۹۹ \Rightarrow G + ۲۱ = ۹۹ \Rightarrow G = ۹۹ - ۲۱ = ۷۸$

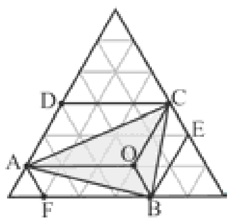
با توجه به رویکرد تبدیلات در هندسه، استدلال هندسی خود را ابتدا بر مبنای تبدیلات هندسی (انتقال، تقارن و دوران) قرار می‌دهیم.

مثال: در شکل مقابل مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ از ۳۶ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر با مساحت ۱ سانتی‌متر مربع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند سانتی‌متر مربع است؟ *(کانگورو ۲۰۱۰)*



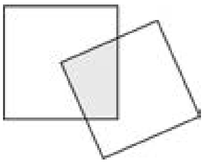
۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۹
۵) ۱۰

پاسخ: $\overset{\triangle}{OCB}$ با $\overset{\triangle}{CEB}$ همنهشت است و همینطور $\overset{\triangle}{AFB} = \overset{\triangle}{AOB}$ و $\overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{AOC}$.

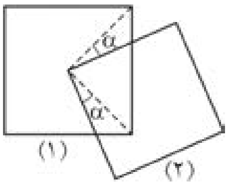


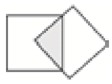
در نتیجه مساحت $\overset{\triangle}{ACB}$ نصف مساحت DCEBFA است. $\overset{\triangle}{ACB}$ مساحت $= \frac{۲۲}{۲} = ۱۱$

مثال: یکی از رأس‌های مربعی به ابعاد ۲×۲ روی مرکز مربعی با همان ابعاد است. مساحت ناحیه‌ی مشترک بین مربع‌ها برابر چند است؟ *(کانگورو ۲۰۱۰)*



پاسخ: اگر مربع (۲) را به اندازهٔ زاویهٔ α در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم:



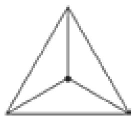
به شکل  می‌رسیم که در این تبدیل مساحت ناحیه مشترک ثابت می‌ماند. در نتیجه مساحت ناحیه مشترک برابر است با:

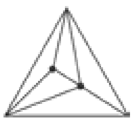
$$\frac{۲\times۲}{۴}=۱$$

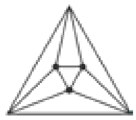
از ارکان اصلی هندسه، نقطه و پاره‌خط است. در سه مثال سعی داریم مفاهیم پیچیده‌ی هندسی را براساس این دو رکن ساده بررسی کنیم:

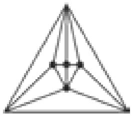
مثال: درون یک مثلث ۱۰۰ نقطه وجود دارد. با وصل کردن این نقاط به هم و هم‌چنین به رئوس مثلث، حداکثر چند مثلث می‌توان تولید کرد؟ رئوس مثلث‌های ایجاد شده باید از این ۱۰۰ نقطه و یا ۳ رأس مثلث اصلی تشکیل شده باشند و این مثلث‌ها نباید با هم مساحت مشترکی داشته باشند.

پاسخ:

فرض کنید ۱ نقطه داریم: ۳ مثلث $\Rightarrow$ 

فرض کنید ۲ نقطه داریم: ۵ مثلث $\Rightarrow$ 

فرض کنید ۳ نقطه داریم: ۷ مثلث $\Rightarrow$ 

فرض کنید ۴ نقطه داریم: ۹ مثلث $\Rightarrow$ 

طبق الگویی که به‌دست آوردیم، تعداد مثلث‌های ممکن برابر است با ۲ برابر تعداد نقاط داخل مثلث به‌علاوه‌ی ۱. پس با ۱۰۰ نقطه داخل مثلث می‌توان ۲۰۱ مثلث به‌دست آورد.

مثال: مجموع تعداد قطرهای دو چندضلعی با هم، ۸۹ تا است. تعداد ضلع‌های این دو چندضلعی روی هم چند است؟

(مسابقات ریاضی دبیرستان‌های فرانسه)

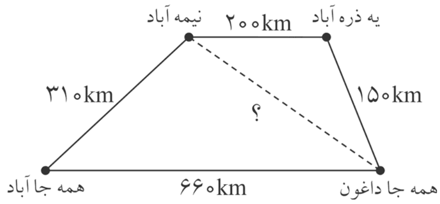
پاسخ: تعداد قطرهای یک n ضلعی از رابطه‌ی $\frac{n\times(n-۳)}{۲}$ محاسبه می‌شود. در جدول زیر در ردیف اول تعداد ضلع‌های چندضلعی و در ردیف دوم تعداد قطرهای آن نوشته شده است. باید دو عدد از ردیف پایین انتخاب کنیم که مجموع آن‌ها ۸۹ باشد. $(۸۹=۵۴+۳۵)$ ۳۵ تعداد قطرهای یک ۱۰ ضلعی است و ۵۴ تعداد قطرهای یک ۱۲ ضلعی است. در نتیجه مجموع ضلع‌های آن‌ها ۲۲ است.

۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰	۲۷	۳۵	۴۴	۵۴	۶۵	۷۷	۹۰

توجه کنید در جدول بالا فقط اعداد ۵۴ و ۳۵ هستند که جمع آن‌ها برابر ۸۹ است.

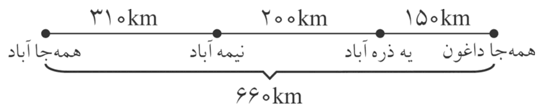
مثال: فاصلهٔ روستای «همه‌جا آباد» تا روستای «همه‌جا داغون» ۶۶۰ کیلومتر است. از روستای «همه‌جا آباد» تا روستای «نیمه آباد» ۳۱۰ کیلومتر، از روستای «نیمه آباد» تا روستای «یه‌ذرّه آباد» ۲۰۰ کیلومتر و از روستای «یه‌ذرّه آباد» تا روستای «همه‌جا داغون» ۱۵۰ کیلومتر است. فاصلهٔ روستای «نیمه آباد» تا «همه‌جا داغون» چه‌قدر است؟

پاسخ: اول سعی می‌کنیم نقشه‌ی راه‌های ارتباطی بین این روستاها را بکشیم:

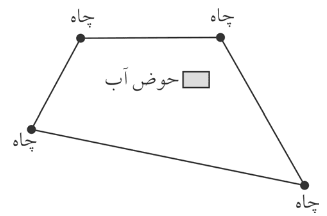


نقشه را کشیدیم. طول مسیر نقطه‌چین، چیزی است که صورت مسئله از ما می‌خواهد. با کمی دقت می‌بینیم که ۶۶۰=۱۵۰+۲۰۰+۳۱۰. با توجه به اصل حمار، باید اندازهٔ خط شکسته بیش‌تر از مسیر مستقیم می‌شد، ولی نشد! و این بدان معنی است که شکل بد کشیده شده است. یعنی روستاهای نیمه آباد و یه‌ذره آباد، هر دو روی خط مستقیم بین روستاهای همه‌جا آباد و همه‌جا داغون قرار دارند. پس فاصلهٔ نیمه آباد تا همه‌جا داغون برابر است با km ۳۵۰=۱۵۰+۲۰۰.

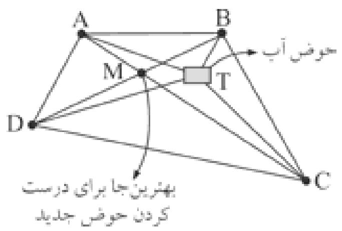
شکل صحیح:



مثال: عباس هر روز صبح مجبور بود که حوض روستا را پر از آب کند. هر روز صبح که بیدار می‌شد، باید از چهار تا چاه روستا آب برمی‌داشت و در حوض آب می‌ریخت تا الاغ‌های اهالی روستا هر وقت تشنه می‌شدند از آن آب می‌خورند. یک روز به این فکر افتاد که حوض جدیدی درست کند که برای آوردن آب از چاه‌ها و ریختن آن در حوض، کوتاه‌ترین مسافت را طی کند. حوض جدید باید کجا ساخته شود؟



پاسخ: بهترین جا این‌طوری پیدا می‌شود که اول باید چهار تا چاه را به هم وصل کنیم تا یک چهارضلعی به وجود بیاید. بعد قطرهایش را رسم کنیم. محل برخورد قطرهایش می‌شود همان‌جایی که بهتر است حوض قرار بگیرد. می‌دانید چرا؟ فرض کنید حوض قدیمی جایی غیر از محل برخورد قطرها باشد، مثل جایی که در شکل نشان داده شده است (T). چاه‌ها و محل حوض‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم.



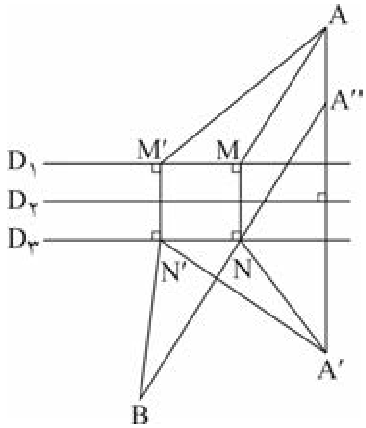
برای این‌که نشان بدهیم جای جدید، یعنی M، بهترین جا است، باید نشان بدهیم جمع مسافت M تا چاه‌ها از جمع مسافت T تا چاه‌ها کم‌تر است.

جمع مسافت M تا چاه‌ها $\rightarrow AM + BM + CM + DM$

جمع مسافت T تا چاه‌ها $\rightarrow AT + BT + CT + DT$

$$\left.\begin{array}{ll} BT + DT > BD = BM + DM & \text{طبق اصل حمار} \\ AT + CT > AC = AM + CM & \text{طبق اصل حمار} \end{array}\right\} \Rightarrow AT + BT + CT + DT > AM + BM + CM + DM$$

مثال: دو روستا در طرفین رودخانه‌ای که کرانه‌هایش خط‌هایی موازی هستند قرار دارند. قرار است روی این رودخانه پلی عمود بر کرانه‌هایش احداث شود. این پل کجا احداث شود تا مسیر بین این دو روستا کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟



پاسخ: دو روستا را با نقاط A و B نشان می‌دهیم. ابتدا A را نسبت به $D_۲$ (خطی است موازی با $D_۱$ و $D_۳$ و دقیقاً وسط این دو خط) قرینه می‌کنیم تا نقطه‌ی A' به دست آید. سپس N را روی خط $D_۳$ طوری انتخاب می‌کنیم که $BN+NA'$ حداقل شود. A' را نسبت به خط $D_۳$ متقارن می‌کنیم، تا نقطه‌ی A'' بدست آید. از A'' به B وصل می‌کنیم و محل برخورد $A''B$ با $D_۳$ را N می‌نامیم. با این روش $BN+NA'$ حداقل می‌شود (چرا؟). N همان نقطه‌ای است که باید پل احداث شود. اگر هر نقطه‌ی دیگری روی خطوط $D_۱$ و $D_۳$ انتخاب شوند، مانند M' و N'، در آن صورت طول مسیر A تا B برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} AM'+M'N'+N'B \\ A'M'=N'A' \end{array}\right\} \Rightarrow AM'+M'N'+N'B=M'N'+BN'+N'A'$$

$M'N'$ که همان طول پل است که برابر با عرض رودخانه و ثابت است. $BN'+N'A'>BN+NA'$ به این ترتیب هر نقطه‌ی دیگری انتخاب شود، طول مسیر بیش‌تر می‌شود.

مثال: دو هواپیما، هم‌زمان از شهر A پرواز کردند. مسیر آن‌ها به این ترتیب بود:

هواپیمای اول: $A \to B \to D \to C \to A \to D \to B \to C \to A$

هواپیمای دوم: $A \to B \to C \to D \to A \to B \to C \to D \to A \to B \to C \to D \to A$.

اگر سرعت آن‌ها یکسان باشد، کدام‌یک پرواز خود را زودتر تمام می‌کند؟ *(المپیادهای ریاضی لنینگراد ۱۹۷۲)*

پاسخ: هواپیمای اول زودتر پرواز خود را تمام می‌کند.

مسیر اول $\xrightarrow{\text{مسافت}} AB+BD+DC+CA+AD+DB+BC+CA$

مسیر دومی $\xrightarrow{\text{مسافت}} AB+BC+CD+DA+AB+BC+CD+DA+AB+BC+CD+DA$

مسافت دومی - مسافت اولی $= ۲BC+۲AB+۲CD+۲DA-۲BD-۲CA=(BC+AB-AC)+(BC+CD-BD)$

$+(AB+AD-BD)+(AD+CD-AC)>۰$

هرکدام از پرانتزهای عبارت بالا طبق اصل حمار بزرگ‌تر از صفر هستند.

در سه پرسش بعدی، به پیوند مسائل هندسی و فضای دستگاه مختصات می‌پردازیم.

مثال: دیوارهای خارجی یک باغ، صاف هستند (انحنا ندارند) و هریک از این دیوارها با دو دیوار مجاورش یک زاویهٔ قائمه می‌سازد. این دیوارها دور بسته می‌سازند و باغ را محصور می‌کند. اگر بدانیم طول دیوارهای این باغ به ترتیب ۱۲، ۵، ۱۰، ۴، ۵، ۲، ۳ و ۷ است. مساحت باغ را حساب کنید.

پاسخ: ابتدا با استفاده از «راهبرد رسم شکل» سعی می‌کنیم که شکل را روی کاغذ بکشیم.

در حین کشیدن بود که متوجّه می‌شویم که باید مسئله را روی محور مختصات پیاده‌سازی کنیم. در این‌صورت دیوارها یکی‌درمیان موازی محور xها و yها می‌شوند.

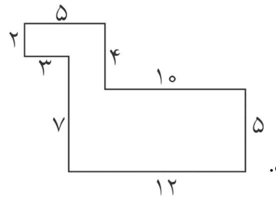
دیوارهای موازی محور xها: ۱۲-۱۰-۵-۳ دیوارهای موازی محور yها: ۵-۴-۲-۷

می‌دانیم که دیوارها یک دور بسته ایجاد می‌کنند. پس اگر شخصی روی این دیوار راه برود باید همان مقداری که چپ می‌رود راست هم برود. و همان مقداری که بالا می‌رود پایین هم برود.

چپ و راست، محور xها: $12,10,5,3 \Rightarrow 12+3=10+5 \Rightarrow \begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-10\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

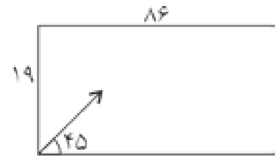
بالا و پایین، محور yها: $5,4,2,7 \Rightarrow 5+4=2+7 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-7\end{bmatrix}$

پس حالا شکل را می‌توان کشید: $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-10\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix}$



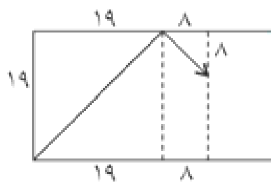
با داشتن شکل هم به‌سادگی می‌توان با مستطیل‌بندی کردن شکل، مساحت آن را حساب کرد، که ۷۴ می‌شود.

مثال: یک میز بیلیارد 86×19 مفروض است. از یک گوشهٔ آن توپ با زاویهٔ ۴۵ درجه شروع به حرکت می‌کند. توپ در نهایت در کدام سوراخ میز که در چهار رأس آن قرار دارند، می‌افتد؟



پاسخ:

به خاطر زاویهٔ ۴۵ درجه، توپ هر چه‌قدر عمودی برود همان مقدار هم افقی می‌رود. مثلاً در شکل مقابل ۲۷ واحد عمودی و ۲۷ واحد افقی حرکت کرده است:



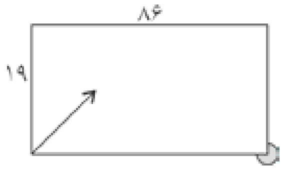
فرض کنید توپ $1634 = 86 \times 19$ واحد در راستای افقی حرکت کند. در این لحظه، توپ در چه فاصله‌ای از لبه‌ی ۱۹ متری است؟

توپ درست چسبیده به لبه‌ی ۱۹ متری میز است، زیرا ۱۶۳۴ بر ۸۶ بخش‌پذیر است. و چون ۱۹ بار طول ۸۶ متری میز را طی کرده است و عدد ۱۹ عددی فرد است، پس در لبه‌ی ۱۹ متری سمت راست است (چون از چپ شروع کرده). حالا می‌رویم سراغ حرکت عمودی توپ:

گفتیم همان مقدار که افقی حرکت کرده، عمودی هم حرکت می‌کند. پس ۱۶۳۴ واحد هم در راستای عمودی حرکت می‌کند.

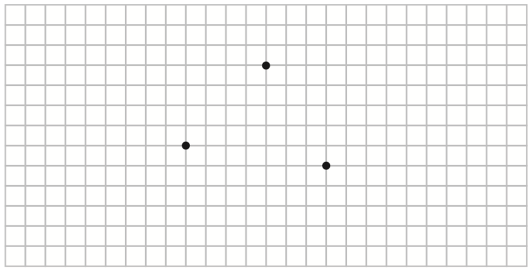
حالا در این لحظه، توپ در چه فاصله‌ای از لبه‌ی ۸۶ متری میز است؟

در این حالت توپ درست در لبه‌ی ۸۶ متری میز است. زیرا ۱۶۳۴ بر ۱۹ بخش‌پذیر است. حالا کدام لبه؟ بالایی یا پایینی؟



توپ ۱۶۳۴ واحد در راستای عمودی حرکت کرده است. پس ۸۶ بار عرض ۱۹ متری میز را طی کرده است و چون ۸۶ عددی زوج است، در همان لبه‌ی پایینی است (چون از پایین شروع کرده).
چون فهمیدیم توپ در جایی روی ضلع راست و نیز ضلع پایین است، پس باید در سوراخ گوشهٔ پایین راست باشد.

مثال: سه رأس از چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع داده شده است. رأس چهارم آن را پیدا کنید. آیا مسئله بیش از یک جواب دارد؟ برای پاسخ‌تان دلیل بیاورید.



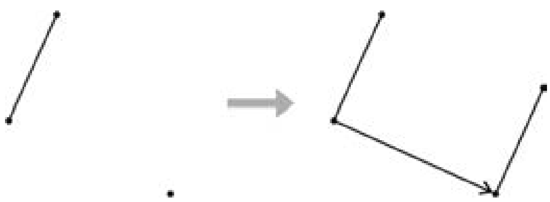
پاسخ: با شرایط مختلفی می‌توان یک چهارضلعی را «متوازی‌الاضلاع» دانست:

۱ـ قطرهایش هم‌دیگر را نصف کنند.

۲ـ ضلع‌های روبه‌رو در آن موازی باشند.

۳ـ ضلع‌های روبه‌رو در آن مساوی باشند.

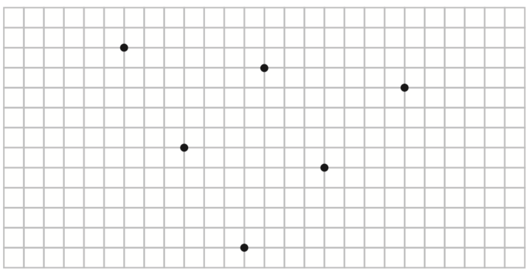
۴ـ یکی از اضلاع آن با ضلع روبه‌رویش مساوی و موازی باشد.



هر کدام از این چهار شرط برای متوازی‌الاضلاع بودن یک چهارضلعی کافی است. در حل این مسئله از تعریف «۴» باید استفاده کرد. (البته بقیه را هم می‌توان استفاده کرد، ولی سخت‌تر است.)

حال کافی است یک ضلع را با بردار طوری انتقال دهیم تا بر رأس سوم منطبق شود. چون هم موازی و هم مساوی می‌شوند.

پس مسئله سه جواب دارد:



در پایان، تمرکز را بر هندسه‌ی فضایی و اجسام سه بعدی می‌گذاریم.

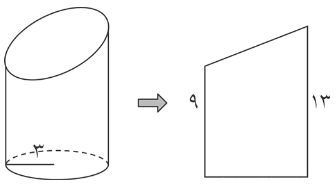
مثال: آیا هرمی با ۱۰۱ رأس وجود دارد؟ با ۱۰۱ یال چه‌طور؟

پاسخ: با ۱۰۱ رأس وجود دارد. مثلاً یک هرم با قاعده‌ی ۱۰۰ ضلعی، دارای ۱۰۰ رأس در قاعده و یک رأس در نوک هرم است.

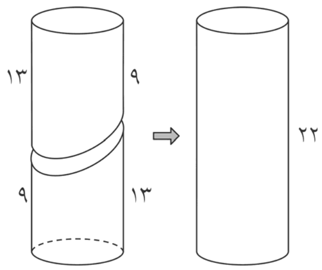
با ۱۰۱یال وجود ندارد. ثابت می‌کنیم که تعداد یال‌های یک هرم همواره عددی زوج است.

اثبات: فرض کن قاعده‌ی هرم دارای n ضلع باشد. در این‌صورت n رأس آن باید به نوک هرم وصل شوند. حالا n تا یال در قاعده داریم و n تا یال که به نوک هرم وصل هستند. پس تعداد یال‌ها می‌شود $n+n=2n$ که همواره زوج است.

مثال: یک استوانه را مطابق شکل با یک تیغ تیز بریده‌ایم. نمای پهلوی آن هم دیده می‌شود. اگر بخواهیم دورتادور حجم را (بدون وجه‌های بالا و پایین) رنگ کنیم، چه مساحتی را باید رنگ کنیم؟



پاسخ: یک حجم مساوی همان حجم مسئله مطابق شکل روی آن می‌گذاریم. در این صورت یک استوانه خواهیم داشت. حال با کمی فکر متوجّه می‌شویم که مساحت جانبی استوانه ۲ برابر مساحت جانبی حجم خواسته شده در مسئله است.



محیط قاعده $= ۲ \times ۳ \times \pi = ۶\pi$

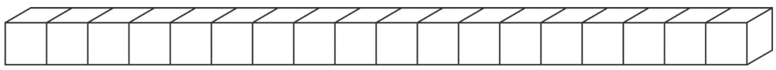
مساحت جانبی استوانه $= ۶\pi \times ۲۲ = ۱۳۲\pi$

پس مساحت جانبی حجم داده شده در مسئله $۶۶\pi = ۲ \div ۱۳۲\pi$ می‌شود.

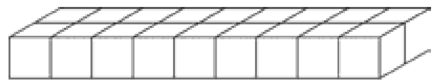
مثال: صادق شکلات جدیدی تولید کرده که در بسته‌های مکعبی تولید می‌شوند. او این شکلات را در هجدهمین سال تأسیس کارخانه‌ی شکلات‌سازی‌اش طراحی کرده است. به همین مناسبت او می‌خواهد جعبه‌هایی حاوی ۱۸ مکعب درست کند. سپس سطح کل جعبه را با کاغذ کادو بسته‌بندی کند. ابعاد جعبه‌ی او به چه شکلی باشد تا کم‌ترین مقدارکاغذ کادو را مصرف کرده باشد؟

پاسخ: جعبه‌ی او باید به شکل مکعب‌مستطیلی باشد که حجمش ۱۸ مکعب شود. به چندین طریق می‌تواند جعبه طراحی کند. می‌توان با «تفکّر نظام‌دار» شکل این جعبه را تصور کرد:

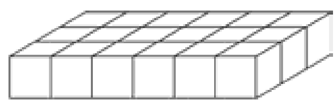
۱) $۱ \times ۱ \times ۱۸$



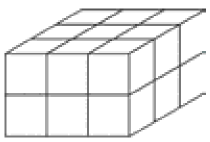
۲) $۱ \times ۲ \times ۹$



۳) $۱ \times ۳ \times ۶$



۴) $۲ \times ۳ \times ۳$



اکنون مقدار کاغذ کادو را در هر مورد حساب می‌کنیم. در هر حالت مقدار کاغذ کادو برابر با مجموع مساحت‌های وجه‌ها است.

۱) چهار وجه ۱۸×۱ و دو وجه ۱×۱ دارد: $(۲\times۱\times۱)+(۴\times۱\times۱۸)=۲+۷۲=۷۴$

۲) دو وجه ۹×۲، دو وجه ۹×۱ و دو وجه ۲×۱ دارد: $(۲\times۱\times۲)+(۲\times۱\times۹)+(۲\times۲\times۹)=۴+۱۸+۳۶=۵۸$

۳) دو وجه ۶×۳، دو وجه ۶×۱ و دو وجه ۳×۱ دارد: $(۲\times۳\times۶)+(۲\times۱\times۶)+(۲\times۱\times۳)=۳۶+۱۲+۶=۵۴$

۴) چهار وجه ۳×۲ و دو وجه ۳×۳ دارد: $(۲\times۳\times۳)+(۴\times۲\times۳)=۱۸+۲۴=۴۲$

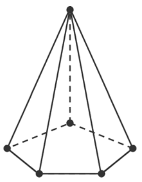
می‌بینیم که در حالت چهارم کم‌ترین مقدار کاغذ کادو مصرف شده است. در این مثال، مفهوم مساحت کل حجم را یاد گرفتیم. ما فهمیدیم ممکن است با حجم برابر، مساحت کلِ متفاوتی داشته باشیم!

مثال: تعداد یال‌های یک شش‌وجهی چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

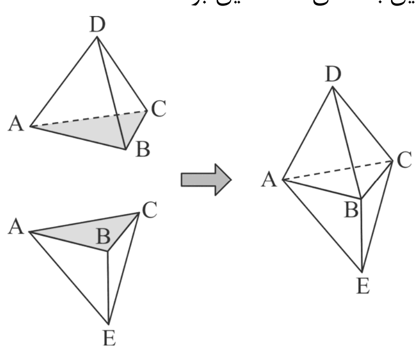
پاسخ: می‌دانیم این حجم ممکن است منشوری یا هرمی باشد.

منشوری: مکعب خود یک حجم منشوری است. پس می‌رویم سراغ حجم‌های هرمی.

هرمی: اگر ۱ وجه را به قاعده اختصاص بدهیم، ۵ وجه هستند که به نوک هرم می‌رسند. پس قاعده باید ۵ ضلع داشته باشد. این هرم با قاعده‌ی پنج‌ضلعی دارای ۱۰ یال است:

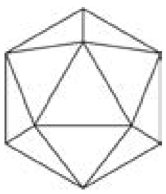


دوتا چهاروجهی منتظم را به هم چسباندم تا یک شش‌وجهی به‌دست بیاید. عمل جمعی که در این‌جا اتفاق افتاده این بود:



$۴+۴-۲=۶$

مثال: شکل مقابل نمایی از یک بیست وجهی منتظم را نشان می‌دهد:

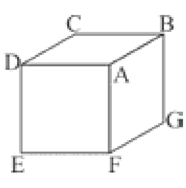


الف) این حجم چند رأس دارد؟

ب) این حجم چند یال دارد؟

پاسخ: الف) حجم از ۲۰ مثلّث تشکیل شده است. پس خیلی ساده محاسباتی را انجام می‌دهیم: $۲۰\times۳=۶۰$

ولی بعید به‌نظر می‌رسد که شکل ۶۰ تا رأس داشته باشد! چون فقط ۹ تا رأس دیده می‌شود و آیا ۵۱ رأس دیگر جایی هستند که دیده نمی‌شوند؟ به نظر بعید می‌رسد. پس یک «مسئلهٔ ساده‌تر» برای خودمان طرح می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم:



مکعب حجمی است که از ۶ مربع تشکیل شده است و به هر رأس آن، مطابق شکل، ۳ مربع به هم رسیده است.

مکعب چند رأس دارد؟

باز هم یک محاسبه‌ی ساده: $۶\times۴=۲۴$

ولی می‌دانیم که مکعب ۸ رأس دارد پس ۲۴ چگونه به ۸ تبدیل شده؟

شاید هر رأس طی عمل ۴×۶، چندین بار شمرده شده است. مثلاً در شکل، رأس A یک‌بار در مربع ABCD شمرده شده است، یک‌بار در مربع ABGF و یک‌بار هم در مربع ADEF.

با تجسّم فضایی می‌بینیم که هر رأس ۳ بار شمرده می‌شود، زیرا در هر رأس ۳ مربع به‌هم رسیده‌اند. پس جواب مسئله می‌شود:

۲۴ ÷ ۳ = ۸

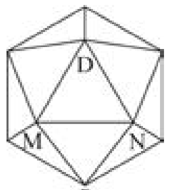
حالا می‌توان از این «مسئلهٔ ساده‌تر» سراغ مسئلهٔ اصلی رفت. درهر رأس ۵ مثلّث به‌هم رسیده‌اند. پس هر رأس در ۵ مثلّث و درنتیجه ۵ بار شمرده می‌شود. بنابراین جواب برابر می‌شود با:

۶۰ ÷ ۵ = ۱۲

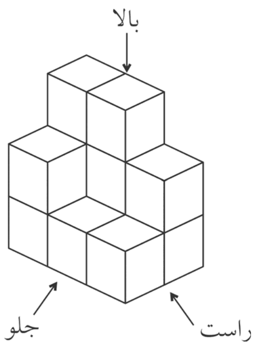
ب) با توجه به تجربه‌ی قسمت (الف) سریع متوجه می‌شویم که این‌بار هم هر یال ممکن است بیش از ۱ بار شمرده شود. ۲۰ تا مثلّث داریم:

۲۰ × ۳ = ۶۰

ولی در این‌جا هر یال ۲ بار شمرده می‌شود. زیرا هر یال در دو مثلّث ظاهر می‌شود. مثلاً یال MN در دو مثلث MND و MNP دیده می‌شود. پس تعداد یال‌ها می‌شود ۳۰ = ۲ ÷ ۶۰.

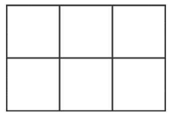


مثال: حجم زیر از ۱۲ مکعب تشکیل شده است. نمای روبه‌رو، بالا و راست این حجم را رسم کنید.

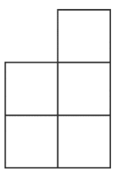


پاسخ:

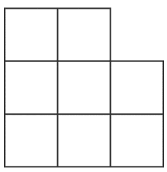
بالا:



راست:



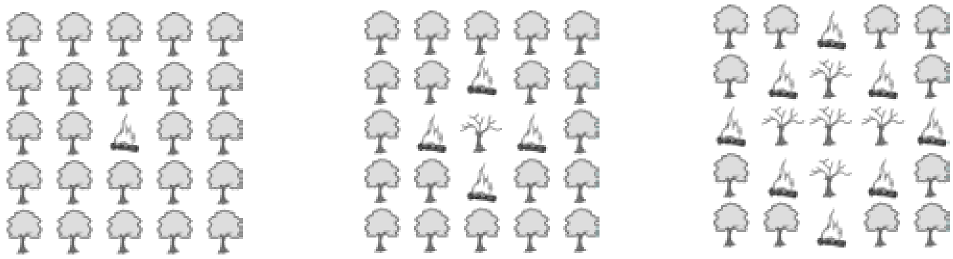
روبه‌رو:



محاسبات

اولین رکن محاسبات در المپیاد ریاضی، «الگویابی» و هم‌چنین «حل مسئلهٔ ساده‌تر» است.

مثال: جنگلی بسیار وسیع به شکل زیر وجود دارد. صاعقه‌ای از آسمان به درختی در میان این جنگل برخورد می‌کند و آن را آتش می‌زند. بعد از گذشت یک ساعت، درختان مجاور آن نیز آتش می‌گیرند و بعد از گذشت ساعتی دیگر، درختان مجاور آن‌ها نیز آتش می‌گیرند. این روند همین‌طور ادامه پیدا می‌کند. در ساعت دوازدهم چند درخت می‌سوزند؟



ساعت دوم   ساعت اوّل   لحظهٔ صاعقه

پاسخ: با بررسی چند ساعت بعد از لحظهٔ آتش‌سوزی متوجه می‌شویم که تعداد درختانی که در هر ساعت می‌سوزند به این ترتیب است:

۱، ۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ....

یعنی از ساعت دوم به بعد، در هر ساعت ۴ درخت بیش‌تر از ساعت قبل می‌سوزند. پس در ساعت دوازدهم ۴۴ = ۴×۱۱ درخت خواهند سوخت.

مثال: بین ۸۱ سکّه، یکی از آن‌ها تقلّبی است و وزنش از بقیه کم‌تر است. اگر یک ترازوی دوکفه‌ای در اختیار داشته باشیم، چگونه می‌توانیم با چهار بار وزن کردن سکّهٔ تقلّبی را پیدا کنیم؟

پاسخ: اوّل ۸۱ سکّه را به سه دسته‌ی ۲۷ تایی تقسیم می‌کنیم. بعد دو دسته از این سه دسته را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و وزن می‌کنیم. اگر وزن یکی از آن‌ها کم‌تر بود، یعنی سکّهٔ تقلّبی در آن دسته است. اگر وزن هر دو دسته برابر بود، یعنی سکّهٔ تقلّبی در دسته‌ی سوم است. در مرحلهٔ بعد، دسته‌ی سکّه‌های تقلّبی که ۲۷ تایی است را به سه دسته‌ی ۹ تایی تقسیم می‌کنیم. مثل مرحلهٔ قبل دو تا از این سه دسته را انتخاب می‌کنیم و روی ترازوی دوکفه‌ای وزن دو دسته را با هم مقایسه می‌کنیم. اگر وزن یکی از این دو دسته کم‌تر بود، یعنی سکّهٔ تقلّبی در آن است و اگر وزنشان باهم برابر بود، سکّهٔ تقلّبی در دسته‌ی سوم است. دسته‌ی کم‌وزن‌تر را به سه دسته‌ی ۳ تایی تقسیم و با همان روش قبل، دسته‌ای که سکّهٔ تقلّبی در آن است را پیدا می‌کنیم. از ۳ سکّهٔ باقی‌مانده، ۲ تا را انتخاب و وزن آن‌ها را مقایسه می‌کنیم. اگر وزن یکی کم‌تر بود یعنی آن سکّه تقلّبی است و اگر وزن آن دوتا برابر بود، یعنی سکّهٔ سوم تقلّبی است.

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{99\times100}+\cdots+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{1\times2}$ را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا فرض کنید تنها ۱ کسر داریم:

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

حالا فرض کنید ۲ کسر داریم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

حالا فرض کنید ۳ کسر داریم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

حالا فرض کنید ۴ کسر داریم:

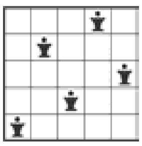
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

همان‌طور که می‌بینید الگوی رابطه را به‌دست آوردیم. پس حاصل عبارت اولیه برابر است با:

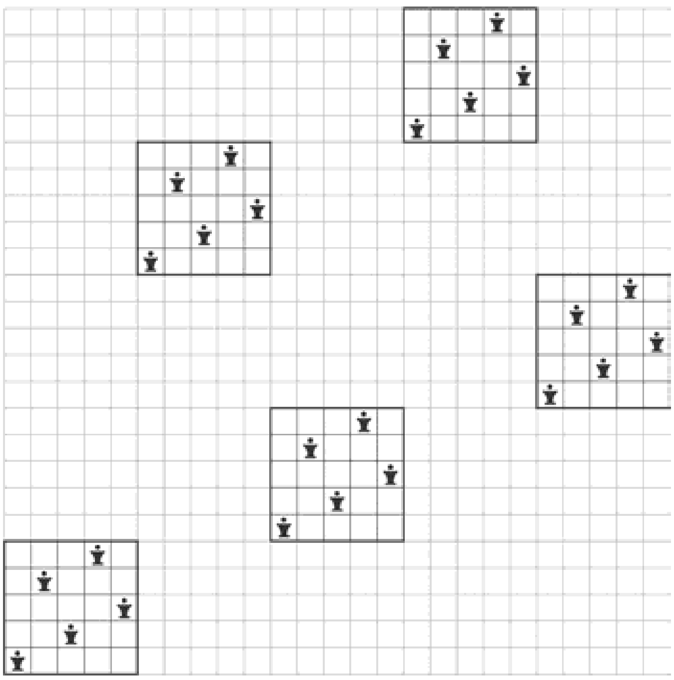
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{99\times100}=\frac{99}{100}$$

مثال: آیا می‌توان در یک صفحهٔ شطرنج ۱۲۵×۱۲۵، ۱۲۵ وزیر قرار داد، به‌طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

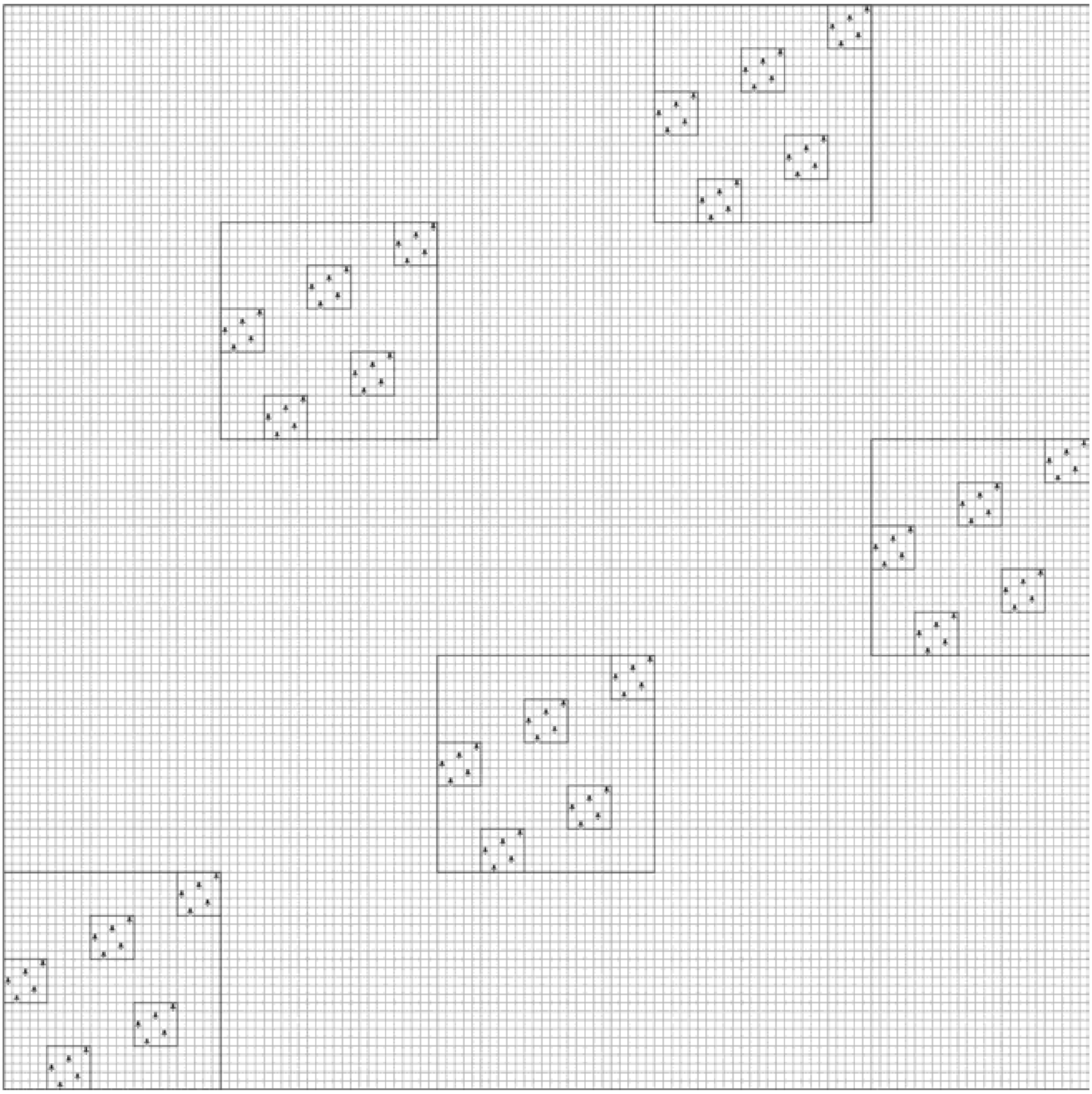
پاسخ: گام ۱) فرض کن بخواهیم در صفحهٔ شطرنجی ۵×۵، پنج وزیر قرار دهیم به‌طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند. یک روش قراردادن چنین است:



گام ۲) حال اگر بخواهیم $25=5^2$ وزیر را در صفحهٔ شطرنجی $25\times25=5^2\times5^2$ بگذاریم به‌طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند، می‌توانیم از حالت قبلی استفاده کنیم. مربّع‌های ۵×۵ مشخص شده در شکل، همان جواب مسئلهٔ قبل هستند، که در جای وزیرهای همان سؤال قرار داده شده‌اند. در واقع شکل زیر از $25=5\times5$ تا مربع ۵×۵ تشکیل شده است. پس به این روش ۲۵ وزیر را در صفحهٔ شطرنجی ۲۵×۲۵ به‌گونه‌ای قرار دادیم که یک‌دیگر را تهدید نکنند.



گام ۳) دیگر حدس شکل برای قراردادن $۱۲۵ = ۵^۳$ وزیر در صفحهٔ شطرنجی $۱۲۵ \times ۱۲۵ = ۵^۳ \times ۵^۳$ آسان است! مربع‌های ۲۵×۲۵ مشخص شده در شکل، جواب سؤال در گام قبلی هستند که در جای قرارگرفتن وزیرها در گام اوّل قرار داده شده‌اند:



مثال: **در جدول ۳×۳ زیر، ۹ عدد طبیعی متمایز کوچک‌تر از ۴۰ قرار دهید، به‌طوری‌که حاصل‌ضرب اعداد سطرها، ستون‌ها و دو قطر همگی با هم برابر باشند.**

		۲۳

پاسخ: برای حل مسئله، اعداد اول کوچک‌تر از ۴۰ را می‌نویسیم: ۲-۳-۵-۷-۱۱-۱۳-۱۷-۱۹-۲۳-۲۹-۳۱-۳۷. بعد مثلاً اگر عدد ۲۳ را جایی در جدول بگذارم چه خواهد شد؟ در این صورت حاصل‌ضرب اعداد ستونی که ۲۳ در آن است بر ۲۳ بخش‌پذیر می‌شود. در این صورت اعداد بقیهٔ ستون‌ها هم باید بر ۲۳ بخش‌پذیر باشند.
ولی این کار امکان‌پذیر نیست، زیرا برای این‌که در ستون دیگری عددی بخش‌پذیری بر ۲۳ وجود داشته باشد باید دنبال اعداد دیگر یعنی ۴۶، ۶۹، ۹۲ و... برویم که از ۴۰ بیش‌تر می‌شود. پس از عدد ۲۳ نباید استفاده شود.

۳۴		
		۱۷

از اعداد اوّل ۲۹، ۳۱ و ۳۷ هم به دلیل مشابه نمی‌توان استفاده کرد. اما دربارهٔ ۱۷ و ۱۹ داستان کمی فرق دارد! فرض کنید که در یک ستون عدد ۱۷ قرار داشت. برای یک ستون دیگر هم چاره وجود دارد: ۳۴، که در خود، شمارندهٔ ۱۷ را دارد. اما برای ستون سوم چه کار می‌توان کرد؟
عدد بعدی که بر ۱۷ بخش پذیر است یعنی ۵۱ از ۴۰ بزرگ‌تر است. پس از ۱۷ و اعدادی که شمارندهٔ ۱۷ دارند نمی‌توان استفاده کرد. همین‌طور از عدد ۱۹ و ۳۸. اما اعدادی که شمارندهٔ ۱۱ یا ۱۳ را دارند ۳ تا هستند و به‌نظر می‌آید که مناسب باشند: ۱۱، ۲۲، ۳۳ و ۱۳، ۲۶، ۳۹. ما عدد ۱۱ را انتخاب می‌کنیم. پس باید در هر سطر و هر ستون یکی از آن سه‌تا ظاهر شوند و فقط به حالات زیر امکان‌پذیر است:

	×	
		×
×		

a

		×
	×	
×		

b

		×
×		
	×	

c

	×	
×		
		×

d

×		
		×
	×	

e

×		
	×	
		×

f

اما حاصل‌ضرب در دو قطر را هم نباید فراموش کرد. در حالت‌های b و f یکی از قطرها ۳ بار ۱۱ را دارد و دیگری ۱ بار و درضمن سطر و ستون‌ها هم ۱ بار. پس یکی از قطرها کار را خراب کرده است. در حالت‌های a، c، d و e هم یکی از قطرها از شمارندهٔ ۱۱ بهره‌ای نبرده است! پس در این حالت‌ها هم یک قطر کار را خراب کرده است. حالا سراغ شمارندهٔ ۷ می‌رویم. اعدادی که شمارندهٔ ۷ را دارند عبارت هستند از ۷، ۱۴، ۲۱، ۲۸ و ۳۵. هر کدام از آن‌ها یک بار ۷ را در خود دارند. اگر از یکی، دوتا، چهارتا و پنج‌تا از آن‌ها استفاده کنیم، به تعداد عادلانه بین ستون‌ها تقسیم نمی‌شوند. اگر از سه‌تا هم استفاده کنیم، مشابه ۱۱، یکی از قطرها کار را خراب می‌کند. پس تا این‌جا از شرّ عددهایی که شمارندهٔ ۷ یا ۱۱ یا ۱۳ یا ۱۷ یا ۱۹ یا ۳۱ یا ۳۷ را دارند راحت شدیم! یعنی فقط اعدادی که از ۲، ۳ و ۵ تشکیل شده‌اند باقی می‌ماند. به خاطر محدودیت کوچک‌تر از ۴۰ بودن، باید از اعدادی که شمارندهٔ ۵ دارند صرف‌نظر کرد. اعدادی که شمارندهٔ ۳ دارند و شمارندهٔ دیگری جز ۲ ندارند را در نظر گرفتم. زیر هرکدام تعداد دفعاتی که ۳ را داشتند را علامت زدم:

۳۶	۲۷	۲۴	۱۸	۱۲	۹	۶	۳
★	★	★	★	★	★	★	★
★	★		★		★		
	★						

اما نتیجه کماکان غلط بود، زیرا اعداد متمایز نبودند. به‌خاطر این موضوع جدول را قرینه کردم:

★	★★	
	★	★★
★★		★

$\longrightarrow$

	★★	★
★★	★	
★		★★

و دو جدول را درهم ضرب کردم:

۳	۹	۱
۱	۳	۹
۹	۱	۳

$\times$

۱	۴	۲
۴	۲	۱
۲	۱	۴

$=$

۳	۳۶	۲
۴	۶	۹
۱۸	۱	۱۲

در این بخش به تفکر «جبری کردن مسئله» می‌پردازیم. در نتیجه حل مسئله به کمک روابط جبری، تشکیل و حلّ معادله صورت می‌گیرد.

مثال: امین در جدولی ۳×۳ اعدادی طبیعی نوشت که مجموع اعداد تمام سطرها، ستون‌ها و قطرهای جدول با هم برابر باشند. شادی تمام اعداد جدول به جز سه تا را پاک کرد. آیا می‌توانید بگویید که امین در خانهٔ سطر بالا و ستون چپ چه عددی نوشته بود؟

	۷	۱۲
۳		

پاسخ: عدد خانهٔ سطر بالا و ستون چپ را x فرض می‌کنیم. پس مجموع اعداد سطر بالا برابر $۱۹+x$ می‌شود. پس باید تمام مجموع‌ها (مجموع سطرها، مجموع ستون‌ها و مجموع اعداد روی دو قطر) هم برابر $۱۹+x$ شود. در مرحلهٔ بعدی بقیهٔ خانه‌ها را برحسب x می‌نویسیم. سراغ خانه‌ی زیر ۳ می‌رویم. چون باقی خانه‌ها را نمی‌توان مستقیم به‌دست آورد یا برحسب x نوشت. در ستون چپ یکی از خانه‌ها x قرار دارد و در دیگری ۳، و مجموع سه عدد در ستون باید برابر $۱۹+x$ شود. پس عدد سوم هم برحسب x به‌دست می‌آید:

$$x+۳+?=۱۹+x \Rightarrow ?=۱۹+x-(۳+x)=۱۹+x-۳-x=۱۶$$

پس خوش‌بختانه عدد آن خانه به‌دست آمد:

x	۷	۱۲
۳		
۱۶		

حالا باید دید که از بین سطرها، ستون‌ها و قطرها کدام یک به درد می‌خورد! ستون‌های راست و وسط دارای دو خانه‌ی نامعلوم هستند و همین‌طور سطر پایین و وسط. اما یکی از قطرها بسیار مناسب است! یعنی قطری که از ۱۲ و ۱۶ می‌گذرد. دو عدد روی این قطر معلوم است و مجموع اعداد هم که باید $۱۹+x$ باشد:

		۱۲
	?	
۱۶		

$$۱۶+۱۲+?=۱۹+x \Rightarrow ?+۲۸=۱۹+x \Rightarrow ?=۱۹+x-۲۸=x-۹$$

پس خانه‌ی مرکزی هم برحسب x به‌دست می‌آید:

x	۷	۱۲
۳	x−۹	
۱۶		

حالا می‌توان سراغ ستون وسط رفت. در این ستون یک عدد و یک خانه برحسب x به‌دست آمده است. مجموع اعداد ستون را هم که برحسب x داریم، پس عدد پایین را هم می‌توان حساب کرد:

۷
x−۹
?

$$۷+(x-۹)+?=۱۹+x \Rightarrow x-۲+?=۱۹+x \xrightarrow{\text{از دو طرف } x \text{ را کم می‌کنیم}} -۲+?=۱۹ \Rightarrow ?=۲۱$$

عدد کنار ۱۶ هم به‌دست آمد:

x	۷	۱۲
۳	x−۹	
۱۶	۲۱	

حالا باید سطر پایین را بررسی کرد، چون در آن دو عدد داریم و مجموع هم $۱۹+x$ است:

۱۶	۲۱	?

$$?+۱۶+۲۱=۱۹+x \Rightarrow ?+۳۷=۱۹+x \Rightarrow ?=۱۹+x-۳۷=x-۱۸$$

پس جدول ما این‌گونه می‌شود:

x	۷	۱۲
۳	x−۹	
۱۶	۲۱	x−۱۸

در یکی از دو قطر داریم:

x		
	x−۹	
		x−۱۸

مجموع این قطر برحسب x است، ولی نه به شکل $x+۱۹$. بلکه:

$$x+(x-۹)+(x-۱۸)=۳x-۲۷$$

از یک طرف می‌دانیم که مجموع باید $x+۱۹$ باشد و از طرف دیگر $۳x-۲۷$ شده است.

$$x+۱۹=۳x-۲۷ \Rightarrow ۱۹+۲۷=۳x-x \Rightarrow ۴۶=۲x \Rightarrow x=۲۳$$

می‌دانیم که مجموع‌ها هم $۴۲=۱۹+۲۳$ می‌شود، پس تنها عدد باقی‌مانده در جدول هم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

x	۷	۱۲
۳	x−۹	
۱۶	۲۱	x−۱۸

$\xrightarrow{x=۲۳}$

۲۳	۷	۱۲
۳	۱۴	
۱۶	۲۱	۵

۴۲ ←	۲۳	۷	۱۲	
۴۲ ←	۳	۱۴	۲۵	
۴۲ ←	۱۶	۲۱	۵	
۴۲	۴۲	۴۲	۴۲	۴۲

مثال: می‌خواهیم تمام اعداد ۱۸ ، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ را طوری در جدول ۶×۳ زیر قرار دهیم که مجموع اعداد هر سه ردیف با هم برابر شوند. آیا می‌توان این کار را انجام داد؟ (اگر نمی‌شود بگویید چرا؟ و اگر می‌شود این کار را انجام دهید.) آیا می‌توان این کار را طوری انجام داد که مجموع اعداد هر شش ستون با هم برابر شوند؟

پاسخ: برای این‌که بتوان اعداد ۱ تا ۱۸ را در این جدول طوری نوشت که مجموع اعداد هر سه ردیف جدول با هم برابر شوند، لازم است که مجموع این اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

$$۱+۲+۳+...+۱۸=\frac{۱۸\times۱۹}{۲}=۱۷۱$$

۱۷۱ بر ۳ بخش‌پذیر است. مجموع اعداد هر ردیف جدول باید برابر باشد با:

$$\frac{۱۷۱}{۳}=۵۷$$

پس ما باید در هر ردیف ۶ عدد انتخاب کنیم که مجموعشان بشود ۵۷. می‌دانیم:

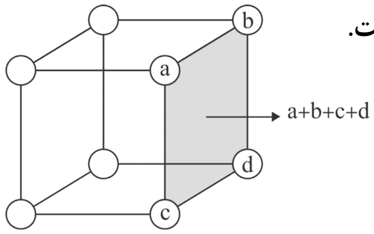
$$۵۷=۳\times۱۹$$

پس در هر ردیف سه مجموع ۱۹ تا درست می‌کنیم:

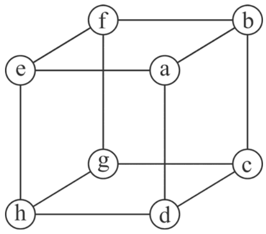
۱	۱۸	۲	۱۷	۳	۱۶
۴	۱۵	۵	۱۴	۶	۱۳
۷	۱۲	۸	۱۱	۹	۱۰

برای این‌که این اعداد را طوری بچینیم که مجموع اعداد هر شش ستون با هم برابر باشند، باید مجموع کل اعداد بر ۶ بخش‌پذیر باشد. ۱۷۱ بر ۶ بخش‌پذیر نیست، پس این کار امکان‌پذیر نیست.

مثال: روی هرکدام از رأس‌های یک مکعب، یک عدد طبیعی دلخواه نوشته شده است. شخصی روی هرکدام از وجه‌های مکعب مجموع اعداد رأس‌های آن وجه را می‌نویسد. پس در نهایت او شش عدد می‌نویسد (مکعب شش وجه دارد!) ثابت کنید مجموع شش عددی که او حساب کرده است همیشه بر ۳ بخش‌پذیر است.



پاسخ: اوّل مکعب را می‌کشیم و عددهایی فرضی h, g, f, e, d, c, b, a را در رأس‌های آن می‌گذاریم. بعد مجموع اعداد هر وجه را حساب می‌کنیم:



وجه راست: $a + b + c + d$

وجه پایین: $c + d + g + h$

وجه چپ: $e + f + g + h$

وجه جلو: $a + d + e + h$

وجه بالا: $a + b + e + f$

وجه عقب: $b + c + f + g$

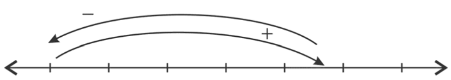
هنگام محاسبه‌ی مجموع این شش عبارت جبری، متوجّه می‌شویم که هر حرف دقیقاً ۳ بار ظاهر شده است. پس مجموع این شش عبارت جبری برابر می‌شود با: $۳a+۳b+۳c+۳d+۳e+۳f+۳g+۳h=۳\times(a+b+c+d+e+f+g+h)$

می‌دانیم اگر x یک عدد طبیعی باشد، عدد $۳x$ بر ۳ بخش‌پذیر است. پس مجموع اعداد روی وجه‌ها هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

برای تمرین بیش‌تر در زمینه‌ی اعداد صحیح، چند مثال در این زمینه آورده‌ایم:

مثال: یک ملخ روی یک خط راست می‌پرد. طول اوّلین پرش او ۱ سانتی‌متر، دومی ۲ سانتی‌متر، سومی ۳ سانتی‌متر، ... است. او در هر پرش به دلخواه خود یا در جهت پرش قبلی می‌پرد یا در خلاف جهت آن. آیا ممکن است او پس از ۴۰ پرش، در نقطه‌ی آغازین حرکت خود باشد؟ بعد از ۴۱ پرش چطور؟

پاسخ: فرض می‌کنیم که هر پرش یا به سمت راست است یا چپ. بهتر بگوییم، یا مثبت است یا منفی.



می‌خواهیم او بعد از آخرین حرکت خود روی نقطه‌ی آغازین قرار گیرد. یعنی به عبارت دیگر تمام مثبت‌ها و منفی‌ها هم‌دیگر را خنثی کنند. پس اوّلین کاری که می‌کنیم آزمایش کردن برای مقادیر کوچک بود.

با دو پرش: به وضوح نمی‌شد.

با سه پرش: اگر بار اوّل و دوم را در جهت مثبت و بار سوم را در جهت منفی بپرد، می‌شود: $(+۱)+(+۲)+(-۳)=۰$

با چهار پرش: اوّلین چیزی که به ذهنمان می‌رسد، این بود که ۴ و ۱ را در یک سمت بگذارم و ۲ و ۳ را درسمت دیگر:

$(+۱)+(-۲)+(-۳)+(+۴)=۰$

با پنج پرش: اوّل یک «=» می‌نویسیم و سعی می‌کنیم هر کدام از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را در یکی از دو طرف آن قرار دهم، به‌طوری مجموع اعداد در دو طرف آن برابر شود. ولی هر چه‌قدر امتحان کنیم نمی‌شود. $۵+۲+۱ \neq ۳+۴$

متوجه می‌شویم که مجموع طول پرش‌های ملخ برابر $۵+۴+۳+۲+۱$ است. یعنی در کل ۱۵ سانتی‌متر می‌پرد. پس برای این‌که به جای اوّلش برگردد، باید نیمی از پرش‌هایش در جهت مثبت باشد و نیمی دیگر در جهت منفی. $۱۵ \div ۲ = ۷/۵$

ولی امکان ندارد که مجموع طول چند تا از پرش‌هایش $۷/۵$ باشد!

برای حل مسئلهٔ اوّل، ابتدا مجموع طول‌های کل ۴۰ پرش او را حساب کردم: $۱+۲+۳+\cdots+۴۰ = \frac{۴۰ \times ۴۱}{۲} = ۸۲۰$

پس باید مجموع طول تعدادی از پرش‌هایش برابر با نصف ۸۲۰، یعنی برابر با ۴۱۰ می‌شد. برای پیدا کردن چند عدد بین ۱، ۲، ۳، ...، ۴۰ که مجموعشان ۴۱۰ شود، می‌توان نوشت: $۱+۴۰=۴۱$ ، $۲+۳۹=۴۱$ ، $۳+۳۸=۴۱$ ، ... ، $۱۰+۳۱=۴۱$

پس این ۲۰ عدد مجموعی برابر ۴۱۰ دارند:

$$۱+۲+۳+...+۱۰+۳۱+۳۲+۳۳+...+۴۰=۴۱۰$$

پس ۲۰ عدد دیگر نیز مجموعی برابر ۴۱۰ دارند: $۱۱+۱۲+۱۳+...+۳۰=۴۱۰$

بنابراین مسئله حل شد. ملخ ابتدا باید ۱۰ بار در جهت منفی بپرد، سپس ۲۰ بار در جهت مثبت و دوباره ۱۰ بار در جهت منفی:

$$-(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)+(۱۱+۱۲+۱۳+\cdots+۳۰)-(۳۱+۳۲+۳۳+\cdots+۴۰)=۰$$

برای حل قسمت دوم، قبل از هر کاری از تجربه‌ی قسمت اول استفاده می‌کنیم و مجموع طول پرش‌هایش را حساب می‌کنیم:

$$(۱+۲+۳+\cdots+۴۰)+۴۱=۸۲۰+۴۱=۸۶۱$$

نیمی از پرش‌هایش باید در جهت مثبت باشد. یعنی: $۸۶۱ \div ۲ = ۴۳۰/۵$

ولی چون $۴۳۰/۵$ عددی طبیعی نیست، پس این کار امکان‌پذیر نیست و ملخ نمی‌تواند بعد از ۴۱ پرش در جای اوّلش باشد!

مثال: در یک دوره مسابقات فوتبال هشت تیم شرکت کردند. تفاضل گل هفت تا از این تیم‌ها به این صورت بود:

شیلی = ۸+	**چین = ۳+**	**ایرلند = ۲+**	**تونس = ۳−**
قطر = ۶−	**دانمارک = ۱−**	**روسیه = ۴+**	

تیم هشتم استرالیا بود. تفاضل گل تیم استرالیا چند است؟ (تفاضل گل یک تیم در یک دوره از مسابقات، یعنی تعداد گل‌های زده، منهای تعداد گل‌های خوردهٔ آن تیم)

پاسخ: ابتدا از راهبرد «حل مسئلهٔ ساده‌تر» استفاده کنیم و به جای هشت تیم، از دو و سپس سه تیم شروع کنیم.

دو تیم: اگر دو تیم آرژانتین و برزیل چند بار بازی کنند و نتایج زیر حاصل شود،

آرژانتین ۴-۲ برزیل   آرژانتین ۳-۵ برزیل   آرژانتین ۴-۱ برزیل   آرژانتین ۳-۳ برزیل

تفاضل گل‌های آن‌ها به این صورت می‌شود:

آرژانتین: $(۴+۳+۴+۳)-(۲+۵+۱+۳)=۱۴-۱۱=+۳$

برزیل: $(۲+۵+۱+۳)-(۴+۳+۴+۳)=۱۱-۱۴=-۳$

دیدیم که تفاضل گلشان قرینه‌ی هم شد.

سه تیم: اگر سه تیم ایتالیا، فرانسه و آلمان با هم بازی کنند و نتایج زیر حاصل شود،

ایتالیا ۴-۰ آلمان   فرانسه ۴-۳ ایتالیا   آلمان ۱-۵ فرانسه   فرانسه ۱-۴ ایتالیا   آلمان ۳-۲ فرانسه

تفاضل گل‌های آن‌ها به این صورت می‌شود:

ایتالیا: $(۴+۳+۴)-(۰+۴+۱)=۱۱-۵=+۶$

فرانسه: $(۴+۵+۱+۲)-(۳+۱+۴+۳)=۱۲-۱۱=+۱$

آلمان: $(۰+۱+۳)-(۴+۵+۲)=۴-۱۱=-۷$

با در نظر گرفتن سه عدد ۶+، ۱+ و ۷- این رابطه را داریم: $(-۷)+(+۱)+(+۶)=۰$

و در کنار قرینه بودن ۳+ و ۳- (بین آرژانتین و برزیل) ناگهان یک حدس به ذهنمان می‌رسد:

«در یک دوره مسابقات، مجموع تفاضل گل تیم‌ها همواره صفر است.»

سپس این رابطه را می‌نویسیم: مجموع کل تفاضل گل تیم‌ها = (مجموع کل گل‌های خورده شده) − (مجموع کل گل‌های زده شده)

همیشه تعداد کل گل‌های خورده شده با تعداد کل گل‌های زده شده برابر است (چون هر گلی که زده شود، تیم دیگری آن را خورده است!)، پس مجموع کل تفاضل گل تیم‌ها صفر می‌شود.

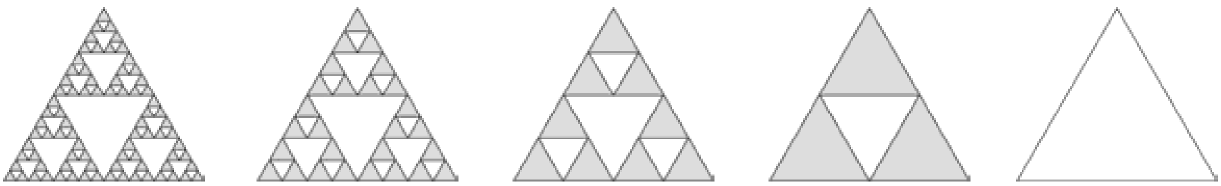
بنابراین تفاضل گل تیم استرالیا در مسئلهٔ هشت تیمه، به این شکل به‌دست می‌آید:

$$(+۸)+(+۳)+(-۶)+(-۱)+(+۴)+(-۳)+(+۲)=+۷$$

بنابراین تفاضل گل تیم استرالیا باید ۷- باشد تا مجموع همه‌ی هشت عدد برابر با ۰ شود.

در پایان برای مفهوم الگوهای عددی، در زمینه‌ی توان و فرکتال‌ها چند مثال آورده شده است که برای تمرین بسیار مفید هستند.

مثال: در الگوی زیر اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه ۱ سانتی‌متر باشد، نسبت مجموع مساحت‌های مثلث‌های سیاه به مساحت کل در مرحلهٔ kاُم را حساب کنید.



مرحلهٔ صفرم — مرحلهٔ اوّل — مرحلهٔ دوم — مرحلهٔ سوم — مرحلهٔ چهارم

پاسخ: تعداد مثلث‌های سیاه: در هر مرحله تعداد مثلث‌های سیاه شکل قبلی سه‌برابر می‌شود:

مرحلهٔ صفرم : تعداد مثلث‌های سیاه $= ۳^۰ = ۱$

مرحلهٔ اوّل : تعداد مثلث‌های سیاه $= ۳^۰ \times ۳ = ۳$

مرحلهٔ دوم : تعداد مثلث‌های سیاه $= ۳^۱ \times ۳ = ۳^۲$

مرحلهٔ سوم : تعداد مثلث‌های سیاه $= ۳^۲ \times ۳ = ۳^۳$

$\vdots$

یعنی در مرحلهٔ kاُم داریم:

مرحلهٔ kاُم : تعداد مثلث‌های سیاه $= ۳^k$

اندازهٔ ضلع‌های مثلث‌های سیاه: در هر مرحله اندازهٔ ضلع‌ها نصف خواهد شد. چون وسط اضلاع مثلث را به‌هم وصل کرده‌ایم. یعنی در مرحلهٔ اوّل طول اضلاع $\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر خواهد بود. در مرحلهٔ دوم طول اضلاع $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}\text{cm}$ خواهد بود و الی آخر.

مرحلهٔ صفرم : طول اضلاع مثلث‌های سیاه $=(\frac{۱}{۲})^{۰}=۱\text{cm}$

مرحلهٔ اوّل : طول اضلاع مثلث‌های سیاه $=۱\times(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\text{cm}$

مرحلهٔ دوم : طول اضلاع مثلث‌های سیاه $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۲}\text{cm}$

مرحلهٔ سوم : طول اضلاع مثلث‌های سیاه $=(\frac{۱}{۲})^{۲}\times\frac{۱}{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۳}\text{cm}$

یعنی در مرحلهٔ k اُم، طول اضلاع مثلث‌های سیاه $(\frac{۱}{۲})^{k}\text{cm}$ خواهد بود. هدف بعدی پیدا کردن نسبت مساحت مثلث‌های سیاه به مساحت کل شکل است.

نسبت مساحت مثلث‌های سیاه به مساحت کل شکل: اگر مساحت کل شکل را S درنظر بگیریم، در مرحلهٔ اوّل به سه مثلث سیاه می‌رسیم. اگر مساحت کل آن‌ها را $S_۱$ فرض کنیم، با توجه به این‌که کل شکل به ۴ مثلث هم‌اندازه تقسیم شده و ۳ مثلث سیاه داریم. پس:

مرحلهٔ اوّل : $\frac{\text{مجموع مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}}=\frac{S_۱}{S}=\frac{۳}{۴}$

در مرحلهٔ دوم هر کدام از ۳ مثلث سیاه با مجموع مساحت $S_۱$، خود به ۴ مثلث مساوی تقسیم می‌شوند که ۳ تا از آن‌ها سیاه شده‌اند. یعنی مجموع مساحت مثلث‌های سیاه جدید (مساحت آن‌ها را $S_۲$ می‌نامیم) $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث‌های مرحلهٔ قبل است. یعنی:

مجموع مساحت مثلث‌های سیاه مرحلهٔ دوم $=S_۲=\frac{۳}{۴}S_۱$

اما می‌دانستیم که $S_۱=\frac{۳}{۴}S$ (مجموع مساحت مثلث‌های مرحلهٔ اوّل $\frac{۳}{۴}$ مساحت کل شکل است). پس:

مجموع مساحت مثلث‌های سیاه مرحلهٔ دوم $S_۲=\frac{۳}{۴}\times(\frac{۳}{۴}S)=(\frac{۳}{۴})^{۲}S\rightarrow\frac{\text{مجموع مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}}=(\frac{۳}{۴})^{۲}$

در مرحلهٔ سوم هم به همین ترتیب نسبت مجموع مساحت مثلث‌های سیاه به مساحت کل شکل در $\frac{۳}{۴}$ دیگری ضرب می‌شود. پس داریم:

مرحلهٔ صفرم : $\frac{\text{مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}}=(\frac{۳}{۴})^{۰}=۱$

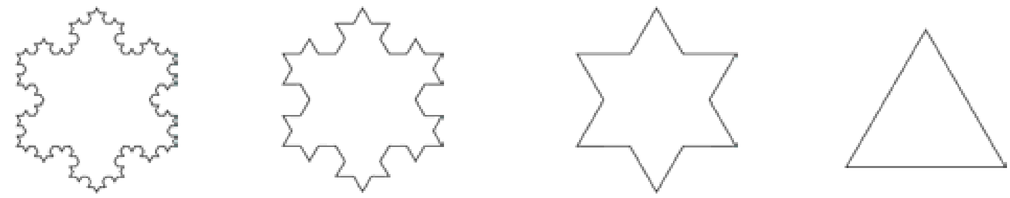
مرحلهٔ اوّل : $\frac{\text{مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}}=۱\times\frac{۳}{۴}=(\frac{۳}{۴})^{۱}$

مرحلهٔ دوم : $\frac{\text{مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=(\frac{۳}{۴})^{۲}$

$$\text{مرحلهٔ سوم}: \quad \frac{\text{مساحت مثلث‌های سیاه}}{\text{مساحت کل شکل}} = (\frac{۳}{۴})^۲ \times \frac{۳}{۴} = (\frac{۳}{۴})^۳$$

یعنی در مرحلهٔ kاُم نسبت مجموع مساحت مثلث‌های سیاه به مساحت کل شکل برابر $(\frac{۳}{۴})^k$ است.

مثال: اگر در الگوی زیر، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحلهٔ صفر ۱ سانتی‌متر باشد، محیط شکل در مرحلهٔ پنجم چه‌قدر است؟



مرحلهٔ صفرم   مرحلهٔ اوّل   مرحلهٔ دوم   مرحلهٔ سوم

پاسخ: تعداد اضلاع: قبل از مرحلهٔ اوّل یک مثلث متساوی‌الاضلاع داریم. یک ضلع این مثلث را در نظر می‌گیریم.

طبق الگو، در مرحلهٔ اوّل یک ضلع به ۴ پاره‌خط تقسیم می‌شود و چون ۳ ضلع داریم تعداد اضلاع در مرحلهٔ اوّل $۴ \times ۳ = ۱۲$ است. در مرحلهٔ دوم هر کدام از ۱۲ ضلع قبلی به ۴ پاره‌خط تقسیم می‌شود، یعنی $۴ \times ۱۲ = ۴۸$. اتفاقی که افتاده این است که ۳ ضلع اوّلیه در مرحلهٔ اوّل در ۴ ضرب شد و در مرحلهٔ بعدی در یک ۴ دیگر هم ضرب شد، یعنی در مرحلهٔ دوم $۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$ ضلع داریم. انتظار داریم که در مرحلهٔ سوم $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۳ = ۱۹۲$ ضلع به‌وجود بیاید که در واقع حدس ما درست است. اگر این نتایج را مرتّب کنیم، برای به دست آوردن تعداد اضلاع شکل در مرحلهٔ kاُم را درنظر بگیریم، داریم:

مرحلهٔ صفرم : $k = ۰ \longrightarrow$ تعداد اضلاع $= ۳ \times ۴^۰ = ۳$

مرحلهٔ اوّل : $k = ۱ \longrightarrow$ تعداد اضلاع $= ۳ \times ۴^۱ = ۱۲$

مرحلهٔ دوم : $k = ۲ \longrightarrow$ تعداد اضلاع $= ۳ \times ۴^۲ = ۴۸$

مرحلهٔ سوم : $k = ۳ \longrightarrow$ تعداد اضلاع $= ۳ \times ۴^۳ = ۱۹۲$

یعنی حدس می‌زنیم که در مرحلهٔ kاُم تعداد اضلاع ۳×۴^k باشد.

طول اضلاع: برای سادگی فرض کنید طول ضلع مثلّث متساوی‌الاضلاع اوّلیه ۱ سانتی‌متر باشد. بنابراین چون در الگوی ساخته شدن شکل، هر پاره‌خط به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است، در مرحلهٔ اوّل، اضلاع شکل همگی $\frac{۱}{۳}$ سانتی‌متر طول دارند. در مرحلهٔ دوم، هرکدام از این اضلاع به ۳ قسمت تقسیم می‌شوند، یعنی $\frac{۱}{۳^۲} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}$ سانتی‌متر طول دارند.

یعنی این‌جا در هر مرحله اندازهٔ اضلاع در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌شود. برای به دست آوردن اندازهٔ اضلاع در مرحلهٔ kاُم، داریم:

مرحلهٔ صفرم : $k=0 \longrightarrow$ اندازهٔ هر ضلع $=1\times(\frac{1}{3})^0=1\times1=1cm$

مرحلهٔ اوّل : $k=1 \longrightarrow$ اندازهٔ هر ضلع $=1\times(\frac{1}{3})^1=\frac{1}{3}cm$

مرحلهٔ دوم : $k=2 \longrightarrow$ اندازهٔ هر ضلع $=1\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3^2}cm$

یعنی در مرحلهٔ k اُم اندازهٔ هر ضلع $(\frac{1}{3})^k$ است.

محیط شکل: حالا می‌توانیم با دانستن تعداد اضلاع و اندازهٔ آن‌ها محیط شکل را در هر مرحله حساب کنیم.

تعداد اضلاع در مرحلهٔ k اُم $=3\times4^k$

اندازهٔ هر ضلع در مرحلهٔ k اُم $=(\frac{1}{3})^k$

محیط شکل در هر مرحلهٔ kاُم $=$ تعداد اضلاع در مرحلهٔ k اُم $\times$ اندازهٔ اضلاع در مرحلهٔ k اُم

محیط شکل در مرحلهٔ k اُم $=(\frac{1}{3})^k\times3\times4^k \Rightarrow$ محیط شکل در مرحلهٔ k اُم $=3\times(\frac{4}{3})^k$

یعنی محیط شکل در هر مرحله به این شکل است:

مرحلهٔ صفرم : $k=0 \longrightarrow$ محیط شکل $=(\frac{4}{3})^0\times3=3cm$

مرحلهٔ اوّل : $k=1 \longrightarrow$ محیط شکل $=(\frac{4}{3})^1\times3=4cm$

مرحلهٔ دوم : $k=2 \longrightarrow$ محیط شکل $=(\frac{4}{3})^2\times3=\frac{16}{3}cm$

مرحلهٔ سوم : $k=3 \longrightarrow$ محیط شکل $=(\frac{4}{3})^3\times3=\frac{64}{9}cm$